www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant (*) et admettant une espérance égale à $1/\lambda$. On désigne par f la densité de X. Montrer que :

$$H(X_0) = -\int_0^{+\infty} f(x) \ln f_0(x)\, dx,$$

et en déduire en utilisant (I.1.) que $H(X) \leqslant H(X_0)$.

4. Soit Y_0 une variable aléatoire gaussienne de densité : $g_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. [forme $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$]

Montrer que Y_0 vérifie (*) et calculer $H(Y_0)$.

5. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité g vérifiant (*). On suppose que Y admet un moment d'ordre 2 égal à σ^2. Montrer que :

$$H(Y_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \ln g_0(x)\, dx$$

et en déduire que $H(Y) \leqslant H(Y_0)$.

MATHÉMATIQUES

(Option agronomie - Option biochimie-biologie)

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

PARTIE 1

On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\, dx$.

1. Calculer u_0 et u_1. Montrer que la suite $(u_n,\ n \in \mathbb{N})$ est décroissante. Montrer que, pour tout n, u_n est strictement positif.

2. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}. En déduire que, pour tout n, on a :

$$(n+1)\, u_{n+1}\, u_n = \frac{\pi}{2}.$$

3. Trouver la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_{n-1}}$ et celle de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

En déduire que u_n est un infiniment petit lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et en donner la partie principale dans l'échelle $(n^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

PARTIE 2

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$, par :

$$f_0(x) = \exp(-x); \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant 0, \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \exp(-x).$$

1. Donner le tableau de variations de f_n ; représenter sur le même graphique f_n et f_{n+1}.

Tournez la page S.V.P.

2. On note M_n la borne supérieure de f_n sur $[0, +\infty[$. Démontrer que la suite $(M_n, n \in \mathbb{N})$ est décroissante et qu'elle converge.

   Déterminer la limite de $\frac{M_{n+1}}{M_n}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

3. On pose $K_n = f_n(n - \sqrt{n})$. Montrer que $\frac{K_n}{M_n}$ a une limite finie non nulle, dont on déterminera la valeur, lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

PARTIE 3

1. Pour tout nombre réel k, on définit la fonction numérique $g_k :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+k}.$$

   Déterminer le développement limité de $g_k(x)$ au voisinage de $+\infty$ en puissances de $\frac{1}{x}$, à l'ordre 2.

2. On définit la suite $(v_n, n \in \mathbb{N})$ par $v_n = n^{\frac{1}{2}} M_n$.

   Déterminer le développement limité de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ en puissances de $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2.

3. En déduire que la suite v_n admet, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, une limite strictement positive que l'on notera b.

PARTIE 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.

1. Établir une relation simple liant $F_{n+1}(x)$, $F_n(x)$, $f_{n+1}(x)$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F_n(x) = 1$.

3. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}\, K_n \leqslant F_n(n) \leqslant 1.$$

PARTIE 5

On définit la suite $(t_n, n \in \mathbb{N})$ par $t_n = \frac{v_{2n}}{(v_n)^2}$.

1. Quelle est la limite de t_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

2. Simplifier t_n, et trouver une relation simple liant t_n et u_{2n}.

3. En déduire la valeur de b, puis la proposition :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}}{n!}\right) = 1.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail